Luqmān, XVII, 1, automne-hiver 2000-2001

Roshdi RASHED

‘Umar Khayyām, mathématicien et philosophe

‘Umar al-Khayyām (ou al-Khayyāmī) est né à Nayshābūr, Iran, en 440 de l'Hégire, c'est-à-dire en 1048 de l'ère chrétienne. Cette information nous a été fournie par son horoscope, transmis par un ancien bibliographe, al-Bayhaqī[1] (499/ 1105-6 - 565/1169-70). Le père de ce dernier connaissait al-Khayyām, et lui-même l'a rencontré alors qu'il n'avait que huit ans. La version qu'il nous donne de la biographie d'al-Khayyām semble véridique, et n'a en tout cas été contredite par aucune autre.

C'est d'un autre contemporain d'al-Khayyām que nous tenons la date de sa mort. Il s'agit d'al-‘Arūḍī al-Samarqandī,

1. Voici ce que dit al-Bayhaqī dans l'article «Al-Khayyām»: «Le philosophe, pilier de la vérité, ‘Umar ibn Ibrāhīm al-Khayyām, est né à Nayshābūr, comme ses père et grand-père. Il suivait Abū ‘Alī [Ibn Sīnā] dans les parties de la philosophie, à cette différence près qu'il avait un mauvais caractère, impatient et irascible» (*Tārīkh ḥukamā' al-Islām*, éd. M. Kurd ‘Alī, Damas, 1946, p. 119). Al-Bayhaqī poursuit en donnant son thème astral, ce qui nous a permis de préciser sa date de naissance. Il écrit enfin: «Quant aux parties du savoir mathématique et philosophique, il les maîtrisait à la perfection» (*ibid.*).

qui l'avait rencontré à la cité de Balkh en 506/1112-1113 et qui nous informe qu'al-Khayyām est mort à Nayshābūr, sa ville natale, en 526/1131. Il aurait ainsi vécu quatre-vingt-trois années solaires.[2]

Sur la vie d'al-Khayyām, nous sommes particulièrement démunis. Si l'on excepte quelques légendes qui circulent çà et là, nos certitudes se bornent à quelques rares faits. Nous savons qu'al-Khayyām avait une double formation, mathématique et philosophique, qui éclaire aussi bien les titres de ses ouvrages qu'un intérêt pour les questions des fondements des mathématiques et les problèmes théoriques en algèbre, comme on le verra plus loin.

Si nous ignorons quels sont ses propres maîtres en mathématiques, nous savons en revanche qu'il était familier avec les travaux de la génération précédente, et même avec les recherches les plus avancées de cette génération. Al-Khayyām avait ainsi étudié certains écrits d'Ibn al-Haytham (mort après 1040), et notamment un traité où il résout le problème de trouver quatre segments entre deux segments donnés tels que les six soient en proportion continue. Il connaissait aussi dans les détails les écrits d'Abū al-Jūd ibn al-Layth. La liste des mathématiciens de premier ordre que cite al-Khayyām, et dont il a mis les travaux à profit, est bien longue. On y trouve des noms aussi prestigieux que ceux d'al-Māhānī, al-Khāzin, al-Ṣāghānī, Ibn 'Irāq, Abū al-Wafā' al-Būzjānī, Ibn al-Haytham, etc. Pour ne citer qu'eux, ces noms nous montrent al-Khayyām aux prises avec la recherche mathématique la plus avancée.

Sa formation philosphique est mieux connue. Al-Khayyām se place lui-même dans la tradition avicennienne. Dans l'un de ses écrits, il parle en effet de «mon maître, le plus éminent

2. Notons que, dans son récit, al-'Arūḍī al-Samarqandī associe al-Khayyām à l'astronome Muẓaffar al-Asfazārī. Il nous informe ainsi que, dans l'année 506, lorsqu'il l'a rencontré à Balkh, ils habitaient dans le palais de l'Émir Abū Sa'īd Jarra (al-Niẓāmī al-'Arūḍī al-Samarqandī, *Čahār Maqāla*, trad. arabe 'Abd al-Wahhāb 'Izām et Yaḥyā al-Khashāb, Le Caire, 1949, p. 69-70).

des modernes, al-Shaykh al-Ra'īs Abu al-Ḥusayn ibn 'Abd Allāh ibn Sīnā».[3] Même si on ne prend pas l'expression «mon maître» à la lettre, on sait par un autre témoignage historique que c'est Bahmanyār, l'élève direct d'Avicenne, qui fut le maître d'al-Khayyām. Dans un texte important rapporté par le bio-bibliographe al-Ṣafadī, on peut lire en effet:

> L'imām Shams al-Dīn Muḥammad ibn Ibrāhīm, connu comme Ibn al-Akfānī, précédemment mentionné, m'a dit: j'ai étudié les *Ishārāt* d'al-Ra'īs Abū 'Alī ibn Sīnā auprès du Shaykh Shams al-Dīn al-Sharwānī le Ṣūfī, dans l'Hospice de Sa'īd al-Su'adā', à l'intérieur du Caire, vers la fin de l'année quatre-vingt-dix-huit et le début de l'année quatre-vingt-dix-neuf; et il m'a dit: je les ai étudiées auprès de leur commentateur, le Maître Naṣīr al-Dīn Muḥammad al-Ṭūṣī. Il a dit: je les ai étudiées auprès de l'imām Athīr al-Dīn al-Abharī. Il a dit: je les ai étudiées avec leurs commentaires auprès du grand imām Fakhr al-Dīn Muḥammad al-Rāzī. Il a dit: je les ai étudiées auprès du Shaykh Sharaf al-Dīn Muḥammad al-Mas'ūdī. Il a dit: je les ai étudiées auprès du Shaykh Abu al-Fatḥ Muḥammad, connu comme Ibn al-Khayyām. Il a dit: je les ai étudiées auprès de Bahmanyār, le disciple d'al-Ra'īs. Il a dit: je les ai étudiées auprès de leur auteur al-Ra'īs Abū 'Alī ibn Sīnā.[4]

Même si ce texte majeur a été localement altéré –ainsi on lit– Muḥammad au lieu de 'Umar, Ibn al-Khayyām au lieu d'al-Khayyām, il indique clairement qu'al-Khayyām fut bien l'élève de Bahmanyār, lui-même disciple direct d'Avicenne.

Sur la carrière d'al-Khayyām, nous tenons des historiens deux faits certains. Le fameux auteur des *Annales*, Ibn al-Athīr, rapporte pour l'année 467/1074-1075, qu'al-Khayyām était au nombre des astronomes du Sultan Malikshāh. Il écrit;

> Au cours de cette année, Niẓām al-Mulk et le Sultan Malikshāh ont réuni un groupe de dignitaires des astronomes, et ont fixé le Nīrūz le premier point du Bélier, alors que le Nīrūz avant cela était lors de l'occupation du milieu du Poisson par le soleil. Ce

3. Dans son mémoire intitulé *al-Kawn wa al-Taklīf*, éd. Muḥyī al-Dīn al-Kurdī dans *Jāmi' al-Badā'i'*, Le Caire, 1917, p. 38.

4. Al-Ṣafadī, *al-Wāfī bi-al-Wafayāt*, 24 Vol. (1931-1993); Wiesbaden, 1947, vol. II, p. 142.

> qu'a fait le Sultan est devenu le principe des calendriers, et en cette année, on a fait des observations pour le Sultan Malikshāh; un groupe de dignitaires des astronomes se sont réunis pour les faire, parmi lesquels ʿUmar ibn Ibrāhīm al-Khayyāmī, Abu al-Muẓaffar al-Asfazārī et Maymūn ibn al-Najīb al-Wāsiṭī. Le Sultan a prodigué énormément d'argent; l'observation a continué jusqu'à sa mort en 485, et s'est arrêtée après sa mrot.[5]

Al-Khayyām a-t-il longtemps appartenu à cet Observatoire? Nous n'en savons rien. En revanche, il nous indique lui-même qu'il avait le soutien du grand Juge Abū Ṭāhir, et qu'il a fréquenté son salon.[6]

La vie d'al-Khayyām a nourri quelques légendes qui circulent encore, et dont l'origine est sans doute l'émerveillement provoqué par ce génie mathématique. En effet, ce grand mathématicien a laissé par ailleurs plusieurs œuvres philosophiques, pour la plupart en arabe. Mais le nom de Khayyām évoque aussi le fameux poète persan, auteur des *Rubāʿiyāt*. Mais rien, pour l'heure, à ma connaissance, n'est venu pour permettre l'identification de ces deux génies. Les rares témoignages qui portent sur le mathématicien, comme ceux d'al-Bayhaqī, d'al-ʿArūḍī, d'al-Ṣafadī, d'Ibn al-Athīr, ignorent absolument le poète.[7] Ceux qui parlent du poète ignorent le mathématicien philosophe. Ce n'est que plus tard que l'on a commencé à fondre les deux personnages, et, dans ces conditions, nous ne pouvons que laisser ouverte cette question, dans l'attente de documents qui permettent de trancher. Rappelons, en attendant, les images véhiculées, qui mêlent faits

---

5. Ibn al-Athīr, *al-Kāmil fī al-Tārīkh*, Beyrouth, 1979, vol. X, p. 98.

6. Il s'agit de Muḥammad ibn ʿAbd Allāh ibn al-Ḥusayn, selon la version du ms. Vatican, Barb. Or. 36, fol. 133v-134r. Voir note complémentaire [10], dans R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie Blanchard, 1999, p. 390.

7. S'agissait-il d'une confusion entre deux personnages bien distincts, le mathématicien et un poète persan connu sous le nom de Khayyām, c'est-à-dire ʿAlāʾ al-Dīn ʿAlī ibn Muḥammad ibn Khalf de Khurāsān, comme l'indique Ibn al-Fawṭī dans son *Muʿjam al-alqāb*? Voir Ahmad Hamid al-Sarraf, *Omar Khayyam*, 3e éd., Bagdad, al-Maʿārif Press, 1961, p. 101.

et légendes.

Selon certaines sources, bien tardives, al-Khayyām apparaît tour à tour sceptique et croyant, mystique et philosophe rationaliste, et, enfin, contre les évidences, membre de la célèbre secte des Assassins. Ainsi, l'ancien bio-bibliographe al-Qifṭī (568/1172-646/1248), dont le récit ne contient aucun fait vérifiable, rappelle qu'al-Khayyām, «incomparable en astrologie et en philosophie», a écrit des poèmes dont les intentions sous-jacentes sont critiques et sceptiques. Voici le portrait qu'il fait d'al-Khayyām:

> L'imām du Khurāsān, le savant du temps, connaît la science des Grecs et incite à la recherche du Dieu Unique en purifiant les gestes du corps pour élever l'âme humaine. Il dit qu'il faut respecter l'ordre de la cité selon les règles grecques. Les Ṣūfīs tardifs ont connu l'apparence de certains de ses poèmes, ils les ont intégrés à leur ordre, ils les ont prononcés lorsqu'ils se réunissaient et lorsqu'ils s'isolaient, alors que leur sens caché est un serpent qui mord le dogme.[8]

Al-Qifṭī poursuit:

> Comme ses contemporains ont blâmé sa religion, et ont dévoilé ce qu'il avait au fond du cœur, il a craint pour sa vie, il a retenu sa langue et sa plume, et il a fait le pèlerinage pour se protéger, et non par piété.[9]

Peint par al-Qifṭī, al-Khayyām (ou plutôt Khayyām) devient un sacrilège et un tartufe. Or c'est en vain qu'on cherchera un tel portrait chez les contemporains d'al-Khayyām. Faut-il d'autre part rappeler qu'al-Qifṭī a vécu un siècle environ après son modèle, et qu'il se plaisait à romancer ses récits pour les rendre pittoresques?[10] Al-Bayhaqī, qui a rencontré al-Khayyām et qui n'hésite pas à le critiquer, ne laisse rien suggérer de tel; il nous montre au contraire un homme de

---

8. Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-Ḥukamā'*, éd. Julius Lippert, Leipzig, 1903, pp. 243-244.

9. *Ibid.*, p. 244.

10. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. II: *Ibn al-Haytham*, Londres, al-Furqān, 1993, Introduction.

son époque, mathématicien philosophe, d'un caractère entier, incapable d'hypocrisie.

La seconde légende est celle que rapporte l'historien Rashīd al-Dīn (mort au VIII^{e} siècle, deux siècles après al-Khayyām) dans son célèbre *Jāmi' al-Tawārīkh* qui fait d'al-Khayyām un contemporain et ami de Ḥasan al-Ṣabbāḥ, fondateur de la secte des Assassins. La simple critique historique ne laisse aucune crédibilité à cette affirmation: il faudrait dans ce cas supposer qu'al-Khayyām aurait vécu cent vingt ans, ce qui n'aurait échappé à personne.

Les travaux d'al-Khayyām

Les anciens bio-bibliographes n'ont pas fourni de listes des écrits d'al-Khayyām, ce qui nous prive d'une source pour connaître l'extension de l'œuvre et d'un moyen pour trancher la question épineuse de savoir si le mathématicien al-Khayyām était le même que le poète Khayyām. De ses travaux mathématiques, nous n'en connaissons que quatre dont trois existent encore:

1) Traité d'algèbre et d'*al-muqābala*;

2) Traité sur la division d'un quart de cercle;

3) Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide;

4) Le quatrième traité est évoqué par al-Khayyām dans son *Algèbre* sur *L'Extraction de la racine* $n^{ième}$. Al-Khayyām revendique d'ailleurs la priorité sur ce thème, puisqu'il écrit: «Nous avons fait un livre pour démontrer que ces méthodes sont exactes et qu'elles mènent à l'objet cherché. Nous en avons, en outre, multiplié les formes, je veux dire pour déterminer les côtés du carré-carré, du carré-cube, du cubo cube, et ceci aussi loin que l'on veut, ce en quoi personne ne nous avait précédé».[11] Ce traité demeure introuvable.

D'autres travaux d'al-Khayyām en sciences et philosophie existent et complètent pour ainsi dire la représentation que

---

11. R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, pp. 128-130.

nous avons des domaines d'activité d'al-Khayyām. Ainsi on peut mentionner:

5) Le *zīj* de Malikshāh;

6) L'art de la balance de la sagesse;

7) *Nīrūz-nāmeh*;

8) Commentaire sur la difficulté de l'ouvrage sur la musique;

En philosophie:

9) Sur la génération et l'obligation (*Fī al-kawn wa al-taklīf*);

10) Un complément au précédent texte;

11) Un premier traité sur l'être, appelé par son éditeur «L'illumination intellectuelle au sujet de la science universelle»;

12) Un traité sur l'être;

13) Un traité en persan sur l'universalité de l'être.

Il nous importe ici les seuls écrits mathématiques.

Le projet algébrique d'al-Khayyām

Par deux fois al-Khayyām fait le récit des commencements de la géométrie algébrique: dans son mémoire sur la division d'un quart de cercle et dans son traité d'algèbre. Des Anciens, c'est-à-dire des Grecs, rien n'est parvenu. Les prédécesseurs ont traduit quelques problèmes solides en termes algébriques, avant de les résoudre par l'intersection des courbes. Al-Khayyām évoque à ce moment les noms d'al-Māhānī, d'al-Khāzin et d'Abu al-Jūd ibn al-Layth. Ce dernier a mené plus loin que tous les autres la recherche en ce domaine, et a pensé à une première classification des équations cubiques avant de déterminer les courbes coniques dans chaque cas. C'est à la suite de ce récit qu'il écrit:

> Quant à moi, j'ai désiré et désire encore ardemment connaître avec certitude toutes leurs espèces (des équations de trois premiers degrés), et distinguer, par des démonstrations, parmi les formes de chacune d'elles, les cas possibles des cas impossibles.[12]

Il s'agit donc d'élaborer une théorie des équations de degré

---

12. *Ibid.*, p. 118.

≤ 3, et d'étendre la théorie des équations des deux premiers degrés pour y inclure les équations cubiques. Mais ici al-Khayyām rencontre un premier obstacle, qui s'avère bénéfique. Pour les équations des deux premiers degrés, al-Khʷārizmī, au début du IXᵉ siècle, avait donné des solutions par radicaux qu'il avait justifiées géométriquement. Dans la seconde moitié de ce même siècle, Thābit ibn Qurra en avait donné la traduction géométrique complète.[13] Mais, pour les équations cubiques on ne connaissait pas encore la solution par radicaux. Cet obstacle majeur exige d'al-Khayyām qu'il remanie les conditions de possibilité du projet d'al-Khʷārizmī, de son modèle pour ainsi dire, pour en ajouter de nouvelles.

Élaborer une théorie des équations de degré ≤ 3, c'est d'abord enrichir les termes primitifs hérités des prédécesseurs algébristes pour être en mesure d'énumérer toutes les équations et de fonder un calcul géométrique susceptible de mener à leur solution. Al-Khʷārizmī et ses successeurs ont fourni des termes comme l'inconnue, son carré, les puissances supérieures, les expressions polynomiales et les opérations arithmétiques sur celles-ci, l'équation,... Sur ce plan, al-Khayyām n'avait rien à ajouter. Mais toute la question demeure, d'attribuer à certains de ces termes un sens géométrique, soit dans le plan, soit dans l'espace. Le concept fondamental qui rend possible cet acte, et sur lequel insiste al-Khayyām, est celui d'unité de mesure qui, s'il est convenablement défini en rapport avec celui de dimension, permet l'application de la géométrie à l'algèbre, et ainsi l'élaboration de la première théorie géométrique des équations algébriques.

Ce concept d'unité de mesure, lié à celui de dimension, est bien présent chez les prédécesseurs d'al-Khayyām lorsqu'ils traitent de calcul géométrique. Pour nous en tenir à deux exemples, rappelons ici les Banū Mūsā, au milieu du IXᵉ

13. Thābit ibn Qurra, *Fī taṣḥīḥ masā'il al-jabr bi-al-barāhīn al-handasiyya*, ms. Topkapi Saray, Ahmet III, n° 2041; voir notre article «L'algèbre» dans R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes*, 3 vol., Paris, Le Seuil, 1997, vol. II, p. 35.

siècle, et Ibn al-Haytham au début du XI^e siècle.[14] Voici ce qu'écrivent les Banū Mūsā:

> L'unité plane par laquelle on mesure la surface est une surface de longueur un, de largeur un, et à angles droits. L'unité solide par laquelle on mesure un solide est un solide de longueur un, de largeur un, et de profondeur un, dont les surfaces s'élèvent les unes sur les autres suivant des angles droits.[15]

Ibn al-Haytham s'exprime dans des termes semblables. Tout le problème est que ces notions puissent épouser celles de l'algèbre.

Al-Khayyām se pose d'emblée la question des dimensions que l'on est en droit d'utiliser en géométrie. Il écrit:

> Et si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, étant donné qu'il est impossible que le carré-carré fasse partie des grandeurs. Ce qui se trouve dans les grandeurs, c'est d'abord une seule dimension, c'est-à-dire la racine, ou, rapporté à son carré, le côté. Puis les deux dimensions, c'est-à-dire la surface –le carré (*māl*, x^2) dans les grandeurs est donc la surface carrée. Enfin, les trois dimensions –c'est-à-dire le corps– le cube dans les grandeurs est le solide limité par six carrés.[16]

C'est donc cette notion de grandeur qu'il faudrait asseoir sur celle d'unité de mesure. L'idée d'al-Khayyām est claire. Il écrit:

> Et toutes les fois que dans ce traité nous dirons: un nombre est égal à une surface, nous entendons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné.[17]

14. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I: *Fondateurs et commentateurs: Banū Mūsā, Thābit ibn Qurra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn al-Samḥ, Ibn Hūd*, Londres, al-Furqān, 1996, et *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III, à paraître.

15. R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. I, Chap. I, p. 60.

16. R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, p. 122.

17. *Ibid.*, p. 130.

Il poursuit:

> Et toutes les fois que nous disons: un nombre est égal à un solide, nous entendons par «nombre» un parallélépipède rectangle, dont la base est le carré de l'unité et dont la hauteur est égale au nombre donné.[18]

Cette conception présuppose, on n'en peut douter, une définition de l'unité linéaire, d'une unité conventionnelle de mesure, de l'unité plane qui est le carré de cette dernière, et de l'unité solide, solide dont la base est une unité plane et la hauteur une unité linéaire. Dans chaque dimension, le nombre est la multiplicité de l'unité pour chaque dimension. Le successeur d'al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, explicite et développe sur ce point la pensée d'al-Khayyām.[19]

Muni de ces termes et de ces notions, al-Khayyām classe alors les vingt-cinq équations engendrées par la combinaison des quatre termes: nombre inconnue, son carré et son cube. La première classification apparaît dans son mémoire sur la division d'un quart de cercle. Il part de la classification traditionnelle des équations des deux premiers degrés, et ajoute les équations obtenues en introduisant le cube. On a ainsi:

Les six équations canoniques d'al-Khʷārizmī:

$ax^2 = bx, ax^2 = c, bx = c, ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx, ax^2 = bx + c.$

Ces équations peuvent être résolues à l'aide du second livre des *Éléments*. Al-Khayyām introduit ensuite le cube, et obtient: trois équations binômes, neuf équations trinômes et sept quadrinômes.

Mais dans le traité il modifie cette classification en reprenant pour ainsi dire la combinaison des termes à la base. On a

---

18. *Ibid.*, p. 132.

19. *Shraf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et Géométrie au XII^e siècle*, 2 vol., Collection «Sciences et philosophie arabes-textes et études», Paris, Les Belles Lettres, 1986, vol. I, p. 15.

ainsi six équations binômes, douze équations trinômes et sept quadrinômes.

Or, un examen plus attentif de ces classifications montre que, si la seconde est plus systématique, elle ne diffère que superficiellement de la première. Dans la seconde en effet, l'équation $x^3 = c$ appartient au premier groupe des six équations binômes; mais en fait al-Khayyām ne la traite véritablement que lorsqu'il engage l'étude des équations cubiques: c'est la classification de celles-ci qui lui importe. C'est pourquoi il a placé les équations cubiques réductibles aux équations du premier et du second degrés avant l'étude des équations cubiques irréductibles, dont $x^3 = c$. La ligne de démarcation passe donc en fait entre les équations résolues à l'aide des *Éléments* et celles résolubles à l'aide des coniques.

Al-Khayyām classe les équations cubiques elles-mêmes selon la répartition des termes de différents degrés dans leurs membres, c'est-à-dire d'après les signes des coefficients. Les deux coniques servant à résoudre ces équations sont précisément choisies en fonction de cette classification. On peut ainsi regrouper ces classes en trois familles:

1) Les équations où figurent le cube (x^3), des côtés (bx) et un nombre (c) sont construites à l'aide d'une parabole et d'un cercle si x^3 et bx sont dans le même membre; d'une parabole et d'une hyperbole équilatère sinon. L'échange des termes bx et c (équations 13 et 14) correspond à la transformation du cercle en une hyperbole équilatère; le changement de signe de b seulement (équation 15) donne une autre hyperbole.

2) Les équations où figurent le cube, des carrés et un nombre sont construites à l'aide d'une hyperbole équilatère et d'une parabole, placées de diverses manières selon le signe des coefficients.

3) Les équations quadrinômes sont construites à l'aide d'une hyperbole équilatère et d'un cercle, ou d'une deuxième hyperbole équilatère. On a un cercle si x^3 et bx sont dans le même membre, et une hyperbole équilatère sinon. Les positions relatives des deux courbes dépendent de la répartition

des carrés et du nombre connu dans les deux membres.

Ce sont les raisons sous-jacentes à la classification d'al-Khayyām que nous venons de récapituler.

Équations binômes

[1] $bx = c$

[2] $ax^2 = c$

[3] $x^3 = c$ résolue plus loin juste avant l'équation 13 à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole.

[4] $ax^2 = bx$

[5] $x^3 = bx$

[6] $x^3 = ax^2$

Équations trinômes

[7] $x^2 + bx = c$

[8] $x^2 + c = bx$

[9] $x^2 = bx + c$

[10] $x^3 + ax^2 = bx$

[11] $x^3 + bx = ax^2$

[12] $x^3 = ax^2 + bx$

Toutes ces équations –à l'exception de [3] qui est traitée immédiatement après– sont résolues à l'aide des «propriétés du cercle», dit al-Khayyām, c'est-à-dire à la règle et au compas. Celles qui suivent le sont à l'aide des coniques.

[13]	$x^3 + bx = c$	cercle-parabole
[14]	$x^3 + c = bx$	parabole-hyperbole
[15]	$x^3 = bx + c$	parabole-hyperbole
[16]	$x^3 + ax^2 = c$	parabole-hyperbole
[17]	$x^3 + c = ax^2$	parabole-hyperbole
[18]	$x^3 = ax^2 + c$	parabole-hyperbole

Équations quadrinômes

[19]	$x^3 + ax^2 + bx = c$	cercle-hyperbole
[20]	$x^3 + ax^2 + c = bx$	hyperbole-hyperbole
[21]	$x^3 + bx + c = ax^2$	cercle-hyperbole
[22]	$x^3 = ax^2 + bx + c$	hyperbole-hyperbole
[23]	$x^3 + ax^2 = bx + c$	hyperbole-hyperbole
[24]	$x^3 + bx = ax^2 + c$	cercle-hyperbole
[25]	$x^3 + c = ax^2 + bx$	hyperbole-hyperbole

Al-Khayyām et Descartes

Il arrive à Descartes de se plaindre d'une certaine incompréhension dont fut victime sa *Géométrie*. Est-ce un trait du caractère de l'homme, la susceptibilité de l'auteur, une manière d'accentuer ses distances par rapport à Viète, ou un argument supplémentaire dans une polémique toujours vivace où il se plaît à dénoncer les limites des Parisiens? Sans doute y a-t-il un peu de tout cela, même si l'essentiel est ailleurs. La raison de cette incompréhension, me semble-t-il, est beaucoup plus profonde, et Descartes lui-même l'a saisie comme dans un clair-obscur. C'est d'ailleurs elle qui se dessine chaque fois qu'éclate le conflit des interprétations de la *Géométrie*. Pour certains, nous assistons avec Descartes à une algébrisation de la géométrie; pour d'autres, c'est précisément le contraire qu'il a accompli. D'autres enfin, dans une analyse pertinente, refusent avec raison de se laisser enfermer dans ce dilemme: j'en citerai au moins deux, J. Itard[20] et J. Vuillemin.[21]

Un an après la publication de la *Géométrie*, Descartes prévoyait les réactions opposées, et exclusives, que son livre ne manquerait pas de susciter, aussi bien de la part des géomètres

20. «La *Géométrie* de Descartes», *Les conférences du Palais de la Découverte*, série D, n° 39, 7 janvier 1956; repris dans J. Itard, *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis et introduits par Roshdi Rashed, Paris, A. Blanchard, 1984, pp. 269-279.

21. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Paris, P.U.F, 1960.

que de celle des algébristes. «J'appréhende, écrit-il,[22] que malaisément elle [la *Géométrie*] sera entendue par ceux qui n'ont point su auparavant d'analyse, et je vois que ceux qui en ont su ne lui rendent aucune justice, et qu'ils tâchent à la mépriser le plus qu'ils peuvent». Cinq mois auparavant, il avait adressé à Mersenne la fameuse phrase: «Vos analystes n'entendent rien en ma géométrie».[23]

Cette méprise dénoncée par Descartes, et contre laquelle il réagira à maintes reprises, n'est nullement l'effet de son caractère ni le produit de son imagination. Certains de ses contemporains, et non des moindres –Desargues– l'ont en effet relevée eux aussi. Écoutons ce qu'écrit Desargues: «Quoique disent ces Messieurs de Beaugrand et autres, j'ai sujet de soupçonner qu'ils ne l'entendent pas [la *Géométrie*] à fond, je veux dire qu'ils ne possèdent pas bien pleinement toutes les intentions de Monsieur Descartes au sujet de sa *Géométrie*».[24] Voilà, la question est lâchée, et ne cessera de se poser depuis la traduction latine de Van Schooten et le commentaire de Rabuel[25]: quelles sont «les intentions de Monsieur Descartes au sujet de sa *Géométrie*»? Question ardue, qui nous conduit à nous interroger sur les raisons qui ont pu empêcher les «analystes», les disciples de Viète, d'entendre en profondeur un livre délibérément algébrique tant par sa genèse et par sa filiation, que par la théorie des équations qu'il renferme; et, en même temps, à nous demander quels obstacles ont pu rencontrer les géomètres dans la lecture d'un livre dont le titre est précisément la *Géométrie*.

À cette situation quelque peu paradoxale de la *Géométrie* dans l'histoire des mathématiques vient s'en superposer une autre, non moins déconcertante. Tous les historiens s'accor-

22. Lettre à Mersenne, 27 juillet 1638, A.T. II, pp. 275-276.

23. Lettre à Mersenne, 1er mars 1638, A.T. II, p. 30.

24. Lettre à Mersenne, 4 avril 1638, dans *Correspondance du P. Marin Mersenne*, commencée par Mme Paul Tannery, publiée et annotée par Cornélis de Waard, Paris, éd. du CNRS, 1963, t. VII, p. 157.

25. *Commentaires sur la* Géométrie *de M. Descartes*, par le R.P. Claude Rabuel, Lyon, 1730.

dent sur la modernité de la *Géométrie* de Descartes, et nul n'a la légèreté de réduire à l'un quelconque de ses prédécesseurs. Bien plus, aucun autre livre mathématique ne peut disputer à la *Géométrie* ce rôle de symbole de la modernité mathématique. Par ses dates, par l'impact qui fut le sien sur les contemporains, par l'extension que lui ont donnée les successeurs –Newton par exemple–, la *Géométrie* est en effet *le* livre de la première moitié du XVII^e siècle. Publié en 1637, il est le fruit des recherches menées entre 1619 et 1636, comme l'attestent certains échos des *Regulae* et quelques témoignages de Beeckman consignés dans son journal, ainsi que les *Cogitationes Privatae*. Les historiens sont donc dans le vrai lorsqu'ils tiennent ce livre et son auteur pour les emblèmes de l'âge nouveau. Mais, lorsqu'il s'agit de donner un contenu à cette modernité et de définir ses rapports aux traditions, l'accord vole en éclats et les historiens divergent. Ils se retrouvent confrontés à la question de départ, celle des «intentions de Monsieur Descartes au sujet de sa *Géométrie*».

C'est à cette question que je voudrais essayer de répondre ici, en partant des écrits des prédécesseurs de Descartes. Je me limite aux mathématiciens médiévaux qui ont écrit en arabe, notamment al-Khayyām (1048/1131), et le nouveau venu, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, qui l'a suivi d'une génération. Le traité d'al-Ṭūsī, intitulé *Les équations*, d'une importance considérable, vient d'être restitué, analysé et intégré à l'histoire des mathématiques.[26] Rappelons pour mémoire qu'al-Khayyām fut le premier dans l'histoire à élaborer une théorie géométrique des équations de degré $\leq$; al-Ṭūsī, quant à lui, a donné la première étude réglée de l'existence des racines de ces équations.

Mon intention, je tiens à le souligner, n'est nullement de retrouver la *Géométrie* de Descartes dans les travaux de ses prédécesseurs. Je voudrais tenter de parvenir, en me référant à l'existence de ces derniers, à *localiser* plus précisément la

26. Sur l'algèbre d'al-Ṭūsī, voir notre édition *Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Œuvres mathématiques: Algèbre et géométrie au XII^e siècle*, 2 vol., Paris, Les Belles Lettres, 1986.

nouveauté de la *Géométrie*, à saisir en quoi elle est vraiment moderne et à établir les liens qu'elle entretient avec la tradition, ou les traditions. Je pense pouvoir montrer, en dehors de toute question d'influence, que la *Géométrie* de Descartes représente pour une part l'achèvement de cette tradition inaugurée par al-Khayyām et al-Ṭūsī; et que, d'autre part cet accomplissement engage une autre tradition, qui certes trouve sa source dans le livre de Descartes, mais dont la véritable fondation sera l'œuvre de ses successeurs. Que Descartes ait eu la connaissance indirecte de cette tradition d'al-Khayyām, ce n'est pas ce qui m'intéresse. Seuls les projets mathématiques, et leur réalisation, seront analysés. On comprendra de plus qu'il ne m'est pas possible de décrire toutes les facettes de la *Géométrie* de Descartes, encore moins de sonder toutes les stratifications qui s'y superposent. Je m'en tiendrai, rapidement, à deux axes principaux, qui traversent cette œuvre magistrale et autour desquels elle s'organise. Le premier consiste à ramener un problème géométrique posé à une équation algébrique à une seule inconnue; le second ramène la *résolution* de l'équation à sa construction par l'intersection de deux courbes «géométriques», dont l'une sera un cercle, dans la mesure du possible. C'est de ces deux démarches, quelque peu contradictoires sans que pour autant on puisse les séparer, que naît la difficulté de saisir le sens de la *Géométrie* de Descartes. C'est là que réside la source du conflit d'interprétation qui l'entoure. Ce sont donc ces deux axes que nous allons reprendre.

Théorie géométrique des équations algébriques: l'achèvement du programme d'al-Khayyām

L'un des premiers actes mathématiques de Descartes porte sur la théorie géométrique des équations algébriques, c'est-à-dire sur la solution de quelques équations du troisième degré au moyen de la géométrie. En 1619, il donne une classification de ces équations, en résout quelques-unes grâce à «ses compas», et étudie un problème qui se ramène à une équation cubique. Par Beeckman, nous savons aussi qu'il s'occupe vers cette date de l'invention de «ses compas», assemblage de tiges articulées qu'il destine précisément à la solution des problèmes solides. Les découvertes en ce domaine qu'il fera durant les fameux six jours d'intense concentration créatrice sont en effet quatre démonstrations, dont il se flatte résolument –«remarquables et tout à fait nouvelles, et cela grâce à mes compas».[27] La première démonstration porte sur la multisection de l'angle en parties égales; les trois autres sont les solutions de quatre équations cubiques, parmi les treize équations obtenues en combinant nombre, racine, carré et cube. Rien de bien nouveau en tout cela: même le langage est encore celui des cossistes allemands et celui de l'*Algèbre* de Clavius (1608). C'est d'ailleurs à ce dernier qu'il emprunte le peu de symbolisme utilisé, à une légère variante près. En bref, sa classification est celle d'al-Khayyām, ses résultats n'atteignent pas encore la généralité qu'on trouve chez ce dernier, et son langage est celui de ses maîtres. La nouveauté revendiquée est bien plutôt de l'ordre de l'imaginaire, ou peut-être l'effet d'une culture mathématique encore modeste. Mais l'authentique nouveauté est ailleurs: elle tient à une idée séminale qui inspire toute son entreprise; et toutes les explicitations et les formulations successives, jusqu'à sa *Géométrie*, sont autant de repères de la genèse et de l'évolution de sa géométrie algébrique. Or c'est précisément cette idée qui a permis à Descartes, en partant d'une connaissance mathématique somme tout modeste, de viser haut et de voir loin, en lui ouvrant le chemin à parcourir. Suivons ses pas.

En 1619 encore, Descartes écrit ces quelques fameuses phrases, dont on ne saurait assez souligner l'importance:

> (...) De même, j'espère démontrer que, pour la quantité continue, certains problèmes peuvent être résolus avec seulement des lignes droites ou circulaires; d'autres ne peuvent l'être qu'avec des lignes courbes autres que des cercles, mais qui ont pour origine un seul mouvement (et l'on peut les tracer à l'aide de nouveaux compas que j'estime aussi juste et aussi géométriques que le compas or-

27. Lettre à Beeckman, 26 mars 1619, dans Descartes, *Œuvres philosophiques (1618-1637)*, éd. F.Alquié, Paris, 1963, t. I, p. 36.

> dinaire avec lequel on trace les cercles); d'autres problèmes enfin ne peuvent être résolus qu'au moyen de lignes courbes engendrées par des mouvements différents les uns des autres et non subordonnés entre eux, et ce ne sont assurément que des lignes imaginaires: telle est la ligne quadratrice, qui est assez connue. Et j'estime qu'on ne saurait rien imaginer dont on ne puisse trouver la solution à l'aide de pareilles lignes. Mais j'espère établir par démonstration quelles questions peuvent se résoudre de telle ou telle façon et non autrement, en sorte qu'il ne restera presque plus rien à découvrir en géométrie.[28]

C'est Descartes lui-même qui commente ensuite: «L'œuvre, il est vrai, est infinie, et ne peut être accomplie par un seul. Projet incroyablement ambitieux!» On voit donc qu'en dépit d'une connaissance mathématique plutôt humble, Descartes lance un programme, de son propre aveu «ambitieux», dont les idées centrales sont: une classification des problèmes grâce aux courbes qui sont utilisées pour les résoudre; une classification des courbes grâce aux mouvements par lesquels elles ont été tracées; et, enfin, une foi inébranlable, que pourtant rien ne vient justifier, en la valeur heuristique de ces classifications pour épuiser dans la démonstration toutes les questions de la géométrie.

Sur ces classifications, qui ne seront baptisées que par la suite «géométrique» et «mécanique», je reviendrai plus trad. Je m'arrête pour l'instant à une comparaison entre ce programme annoncé, et celui qui avait été réalisé par al-Khayyām. On conclura immédiatement que le projet conçu par Descartes, tel qu'il le formule en 1619, est à la fois en deçà et au-delà de celui d'al-Khayyām.

Descartes, en effet, tout comme al-Khayyām, admet qu'un problème plan se ramène, en dernière analyse, à une (ou à plusieurs) équation du second degré, dont les racines sont constructibles à l'aide des propriétés du cercle et de la droite. Mais, alors qu'al-Khayyām distingue les problèmes solides et les problèmes sursolides, et affirme que ce sont les propriétés des coniques qui permettent de déterminer la racine

28. Lettre à Beeckman, 26 mars 1619, éd. Alquié, I, pp. 38-39.

des équations cubiques correspondant aux premiers, et les propriétés d'une courbe cubique et d'une conique, comme l'avait établi Ibn al-Hay<u>th</u>am au X^{e} siècle, qui permettent de résoudre une équation du cinquième degré, Descartes ne procède encore à aucune distinction, et évoque dans leur ensemble ces courbes qui plus tard seront nommées «géométriques». En revanche, al-Khayyām n'évoque aucune courbe autre que les coniques, et, implicitement, une cubique. Descartes parle d'un ensemble de courbes, qui s'oppose à un autre, différent selon le type de mouvement utilisé pour les tracer. Al-Khayyām, lui, ne fait référence à aucune courbe «mécanique»; il avait, pour ainsi dire, «horreur du mouvement» en géométrie. En un mot donc, en 1619, Descartes se trouve sur le même terrain qu'al-Khayyām, avec des résultats mathématiques moins généraux, mais animé d'un projet plus général où domine l'idée d'une classe de courbes qui englobe toutes celles dont s'occupe la géométrie algébrique. Ces nouveaux intérêts, encore en germe dans ce projet, le conduiront à privilégier de plus en plus la notion de courbe algébrique et son étude. Mais avant d'atteindre cette étape, il fallait d'autres acquis pour que cette idée séminale tînt ses promesses et devînt une idée féconde. Pour l'heure, elle ne l'est pas encore.

Six ans plus tard, en 1625-1626, Descartes rédige une *Algèbre*, dont Beeckman eut communication en 1628, année où il fait part de sa construction de tous les problèmes solides. Ces renseignements, entre autres, nous apprennent que Descartes est toujours engagé dans cette même recherche déjà accomplie par al-Khayyām: ramener les problèmes solides aux équations algébriques du troisième degré, que l'on résout par l'intersection de deux coniques. Cette tâche mêle, à l'évidence, les intérêts algébriques aux intérêts géométriques, qui s'y trouvent à ce point enchevêtrés qu'on chercherait en vain à les démêler. Elle ne peut que rencontrer le problème de l'élaboration d'un véritable «calcul géométrique» et de sa justification. Sur ce point, nous ignorons quelle était exactement en 1628 l'idée de Descartes.. On constate pour le moins qu'il hésite encore.[29] Dans sa *Géométrie*, tout comme al-Khayyām dans son *Algèbre*, il procède par un calcul géométrique fondé sur le choix d'une longueur-unité. Mais, alors que le mathématicien du XI^e^ siècle adapte l'unité à la dimension pour respecter l'homogénéité –souci constant qui est encore celui de Viète par exemple– Descartes n'utilise que les longueurs rectilignes. Cette conception de l'unité que l'on retrouve au début de la *Géométrie* fut en fait une acquisition ultérieure, postérieure à 1628, autant que le révèlent les documents disponibles. Jusqu'en 1628, il mêle les deux conceptions, celle d'al-Khayyām et celle de sa *Géométrie*. Pour saisir la différence entre les deux conceptions, notons que le calcul sur les segments de droite, une unité étant choisie, est d'abord une recherche destinée à connaître les constructions géométriques à l'aide desquelles on peut effectuer sur ces segments les mêmes opérations que l'on fait sur les nombres en arithmétique ($\pm$, $\times/\div$, $\sqrt{\ }$). Cette idée, qu'al-Khayyām fut le premier à exprimer, se retrouve chez al-Ṭūsī, Bombelli, Viète, entre autres, ainsi que chez Descartes. Mais, si tous changent d'unité en fonction de la dimension, seul Descartes, dans sa *Géométrie*, ne recourt qu'à des longueurs rectilignes, ou, comme il l'écrit:

> Il est à remarquer que, par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que, pour me servir des noms usités en l'algèbre, je les nomme des carrés, ou des cubes, etc. [30]

On observe de prime abord une rupture manifeste, dont plusieurs historiens ont, semble-t-il, majoré l'importance. Et de fait, à y regarder de plus près, on constate que les prédécesseurs de Descartes n'ont pas toujours respecté l'homogénéité, et que lui-même n'a jamais, même dans la *Géométrie*, complètement rompu avec elle. Certes, c'est par omission ou par négligence que les premiers, comme al-Ṭūsī ou Bombelli, ont parfois dérogé à ce principe. Mais un mathématicien de la classe d'al-Ṭūsī ne néglige pas un principe s'il le juge impor-

29. G. Milhaud, *Descartes savant*, Paris, 1921, pp. 70 sqq.
30. *La Géométrie*, A.T. VI, p. 371.

tant pour la démonstratoin. Quant à Descartes, après avoir prononcé cette belle sentence, il ne tarde pas, à la même page, à faire la première concession à l'homogénéité, en se livrant du reste à des remarques pertinentes sur le moyen de rendre homogène une formule qui ne l'était pas. Son écriture continue alors à être homogène -par exemple $z^3 = az^2 + b^2z - c^3$; et c'est sans doute ce désir d'homogénéité qui l'empêche d'égaler un polynôme à zéro (il fallait pour cela attendre le milieu du second livre de la *Géométrie*), et d'oser représenter un rapport par une seule lettre– or ce n'est pas Descartes qui aurait concédé à la tradition un principe important pour la démonstration. Trois ans plus tard, le mathématicien et arabisant Golius, de retour du Proche-Orient avec une moisson de manuscrits mathématiques -dont d'ailleurs une copie supplémentaire de l'*Algèbre* d'al-Khayyām– soumet à Descartes un problème dont la solution infléchira profondément sa pensée mathématique: le problème de Pappus. Ce problème se réécrit: Soit un groupe de $2n$ ou $2n-1$ segments de droites de position connue et non toutes parallèles; partageons-les en deux sous-groupes, dont chacun est de n droites si le nombre est pair, ou de n et $n-1$ si le nombre est impair. Cherchons le lieu des points tels que le produit des distances aux segments du premier sous-groupe soit dans un rapport donné au produit des distances à ceux du second, produit complété si besoin est par un facteur constant donné. Ce lieu des points est une ligne de position donnée. En janvier 1632, Descartes expédie à Golius l'ébauche de la solution qu'il propose de ce problème, laquelle constitue, dans ses grandes lignes, celle que l'on retrouvera cinq ans plus tard dans la *Géométrie*.

Il n'est guère possible,[31] on le comprendra aisément, de reprendre ici la solution de Descartes à ce problème de Pappus. Je souligne seulement, et brièvement, deux impacts qu'eut cette solution sur son propre programme. Il s'agit

31. Cf.J. Vuillemin, *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, pp. 99-112; ainsi que H.J.M. Bos, «On the Representation of Curves in Descartes' *Géométrie*», *Archive for History of Exact Sciences*, 24, 4 (1981), pp. 295-338, notamment pp. 298-302 et 332-338.

d'abord de l'obligation de rechercher les équations des courbes qui doivent répondre à la question de Pappus. Cette recherche a eu pour effet d'étendre bien plus loin qu'auparavant la théorie des équations algébriques, et d'autre part d'élargir le domaine des courbes algébriques. Cette même recherche, à partir précisément des segments de droite, a enfin mené Descartes à montrer que ces courbes «géométriques» sont les lieux des points des droites et d'autres courbes. Pour être clair, considérons la question de Pappus dans le cas le plus simple, celui de 3, 4 ou 5 droites. «On peut, écrit Descartes, toujours trouver les points cherchés par la géométrie simple, c'est-à-dire en ne se servant que de la règle et du compas».[32] Autrement dit, pour cinq droites, on a une équation en xy telle que:

$$f(x, y) = xy(x - ay - b) - k\alpha(x - cy - d)(x - ey - f) = O;$$

si x (resp. y) est donné, alors y (resp. x) se trouve par une équation du second degré. Maintenant, si les cinq droites, sont toutes parallèles:

$$f(x) = \alpha x(x - a) - (x - b)(x - c)(x - d) = O,$$

l'équation est du troisième degré et ne s'abaisse généralement pas.

Si la question de Pappus porte sur 6, 7, 8 ou 9 droites, on a d'une manière analogue une équation du quatrième degré, excepté si les 9 droites sont toutes parallèles –dans ce cas l'équation est du cinquième degré. Descartes donne ensuite deux autres groupes de droites; il écrit «il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composée que la précédente: et ainsi à l'infini».[33] Dans le second livre de la *Géométrie*, Descartes reprend le problème de Pappus afin de déterminer la courbe cherchée dans chaque cas. Dans le premier cas (de 3 ou 4 droites) cette courbe sera le lieu des points de l'une des trois coniques, d'une circonférence de cercle, ou d'une droite;[34] le lieu sera une cubique ou une quartique dans

32. *La Géométrie*, A.T. VI, p. 380.

33. *Ibid.*, p. 381.

34. Cf. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, vol IV: 1674-1684, éd. D.T. Whiteside, Cambrige, Cambridge University Press, 1971, p.

le cas de 5, 6 ou 7 droites; ce sera une courbe du cinquième ou du sixième degré dans le cas de 9, 10 ou 11 droites. Descartes va plus loin; il a même cru que ce problème de Pappus lui donnerait ainsi toutes les courbes géométriques, erreur que Newton dénoncera plus tard.[35] Mais cette erreur ne doit pas occulter l'essentiel: Descartes, pour résoudre ce problème, procède à l'aide de méthodes algébriques, en faisant appel à la meilleure notation de son temps, et sans faire intervenir les méthodes de la géométrie traditionnelle. Mieux encore, ce problème est l'occasion pour lui de généraliser sa méthode algébrique. Jusqu'en 1631, en effet, il savait résoudre des questions particulières, mais il ne concevait sans doute pas encore un procédé général, toujours valable. Maintenant, il pressent que l'essentiel est d'obtenir l'équation d'une courbe «géométrique», et la courbe elle-même comme lieu de points. Résoudre le problème de Pappus l'a ainsi amené à tenter d'isoler les courbes «géométriques» et à les exprimer comme lieu des points cherchés par les relations algébriques entre les coordonnées de chacun de ces points, $P(x,y)=O$, où P est un polynôme. C'est donc grâce à la solution de ce problème que Descartes a pu retrouver, mais à un tout autre niveau et avec une tout autre précision, les questions relatives à la classification des problèmes et des courbes qu'il avait soulevées en 1619, au début de sa carrière mathématique. Il assimile maintenant sans ambiguïté les courbes «géométriques» aux courbes «organiques», c'est-à-dire celles que l'on peut tracer à l'aide de ses compas. Mais de cela, Descartes ne donne pas la moindre preuve. Il faudra attendre pour cela qu'Alfred Bray Kempe (1849-1922) la fournisse, en 1876.

Nous pouvons à présent comparer plus rigoureusement les

340, où Newton écrit: «Erravit præterea Cartesius in eio quod asseruit omnes curvas quas Giometricas vocat utiles esse in Problemate Pappi». L'objection de Newton a laissé «a long gap at this point in his manuscript, evidently intending to develop the criticism further» (*Ibid.*, p. 340 n. 22).

35. Descartes montre en fait, sans pourtant trop le dire, qu'il sait très bien qu'il ne saurait s'agir d'une seule courbe, mais de deux.

acquis de Descartes à ceux du mathématicien du XI[e] siècle, dans cette perspective que nous avons nommée le premier axe: ramener un problme géométrique posé à une équation algébrique à une seule inconnue. On note d'abord que Descartes, avant d'affronter le problème de Pappus, avait résolu, tout comme al-Khayyām, toutes les équations du troisième degré par l'intersection de coniques. Dans sa *Géométrie*, il procède, toujours comme al-Khayyām, à la solution de toutes les équations du troisième et du quatrième degrés par l'intersection de deux conqiues, mais, lui, s'astreint à une parabole donnée et à un cercle variable selon le type d'équation. Mais pas davantage qu'al-Khayyām il ne s'occupe pour l'heure de l'existence des racines. Pour les équations du cinquième et du sixième degrés auxquelles al-Khayyām ne s'intéresse délibérément pas (il a en effet rencontré le premier cas et il connaissait sa solution, $x^5 = k$), Descartes a conçu une parabole cubique, ou une conchoïde parabolique, une courbe d'équation $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = xy$.

Mais en présence d'une équation cubique, par exemple, Descartes, tout comme al-Khayyām, était réduit à affirmer qu'elle est, au plus, solide; il ne pouvait donc, non plus que lui, préciser la nature des irrationnels qui interviennent dans la solution. Ni l'un ni l'autre ne pouvait, évidemment, soupçonner que ce problème exige que soit connue la décomposition du polynôme associé en ses facteurs premiers sur le corps de ses coeffficients. On constate donc que, jusqu'ici, Descartes réitère la démarche d'al-Khayyām; certes il l'affine, la généralise, la mène jusqu'aux limites logiques possibles, bref, l'achève, mais sans vraiment en atteindre la substance ni en refondre le sens. Est-ce également le cas lorsqu'il s'agit de ce second axe de recherche qui traverse la *Géométrie*? C'est à cette question que nous tâchons de répondre à présent.

De la géométrie à l'algèbre: les courbes et les équations

Le principal instrument théorique du nouveau programme est sans le moindre doute la classification des courbes en «géométriques» et «mécaniques». Celui qui s'intéresse à la *Géométrie* de Descartes doit commencer par connaître l'origine de cette classification, et se demander ce qu'elle recouvre. L'hypothèse la plus couramment avancée pour expliquer cette classification renvoie à l'accroissement sans précédent du nombre des nouvelles courbes au XVII^e siècle.[36] Ce serait donc un nouveau besoin, la nécessité de rendre compte de ces nouveaux objets, qui aurait incité Descartes à forger sa célèbre distinction. Et de fait l'un des points les plus marquants de la recherche mathématique dès la première moitié du XVII^e siècle fut cette invention de nouvelles courbes. Que l'on songe par exemple à tous les efforts, et à tous les débats, qui ont entouré la cycloïde. L'hypothèse serait donc séduisante, voire naturelle, si elle pouvait résister aux dates, à l'examen de la connaissance mathématique qui était celle de Descartes lors de sa conception de la classification, et à l'accueil que lui réservèrent les contemporains. Or tel n'est vraiment pas le cas.

Nous venons de voir que les premiers indices de cette classification, même si les termes sont encore absents, sont relativement anciens, puisqu'ils remontent aux années 1619-1621. Citons par exemple ce que Descartes écrivait à l'époque des *Cogitationes Privatae*: «La ligne des proportions doit être conjuguée avec la quadratrice; [la quadratrice] naît en effet de deux mouvements non subordonnés, le circularie et le droit».[37] Dix ans plus tard, en 1629, Descartes affirme à propos de la quadratrice et de l'hélice cylindrique que toutes les deux ne sont pas «reçues en géométrie», «Car [...] on ne les peut tracer toutes entières que par la rencontre de deux mouvements qui ne dépendent point l'un de l'autre».[38] Ces quelques

---

36. Voir par exemple H.J.M. Bos, *op. cit.*, pp. 295-297.

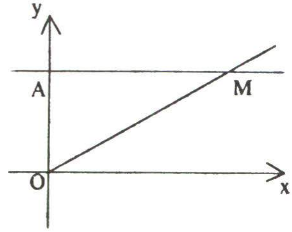
37. A.T.X, pp. 222-223: «Linea proportionum cum quadratice conjungenda: oritur enim [quadratrix] ex duobus motibus sibi non subordinatis, circulari & recto».

38. Lettre à Mersenne, 13 novembre 1629, A.T.I, p. 71. Notons en effet que la quadratrice est le lieu des points M, intersection d'une droite AM parallèle à Ox se déplaçant d'un mouvement de translation uniforme, et

citations viennent confirmer ce que nous savions déjà: la classification est bien ancienne, même si plus tard elle gagnera en élaboration et en netteté. Mais quelles nouvelles courbes Descartes connaissait-il à cette époque? Une seule, et encore de manière peu précise: la *linea proportionum*; toutes les autres courbes venaient des Anciens. De cette *ligne des proportions*, il savait seulement à l'époque qu'elle est engendrée, comme la quadratrice, par deux mouvements séparés, et donc que c'est une courbe «mécanique». La seconde courbe «mécanique» nouvelle, la roulette ou cycloïde, ne sera connue de lui que bien plus tard: il n'en parle qu'un an après la parution de sa *Géométrie*.[39] Et même si l'on veut supposer qu'il en avait eu quelque écho en 1635, la connaissance qu'il en aurait eue alors ne pouvait être que celle d'une courbe encore mal étudiée, comme l'atteste Roberval en personne.[40] L'intérêt porté par Descartes aux courbes et à leur classification ne peut donc être l'effet de cette augmentation du nombre des courbes nouvelles. Plus surprenant encore: cet intérêt s'affirme sur l'arrière-fond d'une connaissance traditionnelle des courbes, tout au moins jusqu'à la rédaction de la *Géométrie*. D'autre part, cette classification revient à Descar-

---

d'une droite OM, tournant autour de O d'un mouvement de rotation uniforme.



39. Lettre à Mersenne, 23 août 1638, A.T.II, p. 313: «Il faut aussi remarquer que les courbes décrites par des roulettes sont des lignes entièrement mécaniques, et du nombre de celles que j'ai rejetées de ma *Géométrie*».

40. Lettre de Roberval à Torricelli, 1647, d'où il ressort que celui-là ne s'est pas occupé de cette courbe avant 1634. Cf. *Opere di E. Torricelli*, éd. G. Loria -G. Sassura, Faenza, 1919.

tes seul. Sous ce rapport, il n'est en effet nullement redevable à ses prédécesseurs, qu'ils soient proches ou lointains. Clavius, par exemple, était loin de rejeter la quadratrice hors de la Géométrie,[41] et Viète refuse de considérer comme reçues en géométrie toutes les courbes, y compris les coniques.[42] Quant aux contemporains de Descartes eux-mêmes, ils n'ont guère accordé d'importance à cette classification. Roberval, par exemple, après avoir défini différemment les courbes mécaniques, c'est-à-dire comme «les lignes courbes qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes ou partie à des droites, partie à des courbes», considère que Descartes les rejette sans raison de la géométrie.[43] Même lorsqu'il adopte les conceptions cartésiennes Roberval persiste à nier la classification de Descartes.[44] De même pour Mersenne, qui, lui, est au courant de la classification depuis 1629: il ne prend même pas la peine de l'évoquer en 1637, là où pourtant elle semblait s'imposer, dans son *Harmonie Universelle*.[45] Fermat, enfin, ne fait dans sa correspondance aucune allusion, sauf erreur de ma part, aux courbes «mécaniques»; elles ne sont évoquées que dans son *De linearum curvarum* de 1660, où il semble admettre, mais seulement tacitement, la distinction, lorsqu'il écrit: «Jamais encore, que je sache, une ligne courbe purement géométrique n'a été égalée par les géomètres à une droite donnée».[46]

C'est donc en somme une surprenante invention que cette

41. Clavius, *Géometria practica*, Roma, 1604, livre 7, pp. 359-360 et 362. Voir aussi l'édition des *Éléments* d'Euclide de 1589, livre 6, p. 894.

42. «Apollonius Gallus», dans *Opera mathematica*, recognita Francisci à Schooten. Vorwort und Register von Joseph E. Hofmann, Leiden 1646; reprod. G. Olms, Hildesheim, New York, 1970, p. 325.

43. Lettre à Fermat, 4 août 1640, dans *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry (Paris, 1891) t. II, p. 200.

44. *Divers ouvrages de mathématique et de physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1693, p. 209.

45. T. II, livre VI, prop. 45, pp. 408-409; *Correspondance du P. Marin Mersenne*, t. III, pp. 258-259.

46. *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 211: «Nondum, quod sciam, lineam curvam pure geometricam rectæ datæ geometræ adæquarunt».

classification des courbes: les prédécesseurs, proches ou lointains, avec qui Descartes n'avait jamais rompu, n'en ressentaient guère la nécessité, non plus que ses contemporains; et lui-même l'avait proposée sans être sollicité par une quelconque nécessité, comme l'explication de nouveaux objets, de nouvelles courbes. Classification arbitraire? nullement. Il la place lui-même au centre de son programme, et ses successeurs, cette fois sous la pression du nombre croissant des nouvelles courbes, l'adoptent et l'affinent –je pense à Newton et à Leibniz. À quel motif obéit le jeune mathématicien de génie, sans grande culture mathématique encore, lorsqu'il propose une telle classification? Et quel contenu perçoit-il de cette classification qu'il vient de forger?

Sur son motif, Descartes lui-même semble quelque peu lever le voile, en recourant à une histoire spéculative et en nous proposant une sorte de conte historique. Il commence par reprocher aux Anciens de n'avoir point «distingué divers degrés entre les lignes composées» au-delà des coniques. Puis il s'étonne d'une confusion qu'ils auraient entretenue entre «géométrique» et «mécanique». Cette carence et cette confusion, Descartes les interprète et formule une conjecture sur leur origine:

> [Les premières courbes] qu'ils ont considérées, ayant par hasard été la spirale, la quadratrice, et semblables, qui n'appartiennent véritablement qu'aux mécaniques et ne sont point du nombre de celles que je pense devoir ici être reçues, à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement; bien qu'ils [les Anciens] aient après examiné la conchoïde, la cissoïde, et quelque peu d'autres qui en sont, toutefois, à cause qu'ils n'ont peut-être pas assez remarqué leurs propriétés, ils n'en ont pas fait plus d'état que des premières. Ou bien, c'est que, voyant qu'ils ne connaissaient encore que peu de choses touchant les sections coniques, et qu'il leur en restait même beaucoup, touchant ce qui se peut faire avec la règle et le compas, qu'ils ignoraient, ils ont cru ne devoir pas entamer de matière plus difficile.[47]

47. *La Géométrie*, A.T. VI, p. 390.

Ici Descartes, comme le veut l'usage dans un conte historique, ne veut pas faire œuvre d'historien, mais il tente d'exposer à ses lecteurs quelques traits exemplaires de la marche de l'esprit. Peu importe donc que les événements évoqués soient douteux, ou même faux.[48] En revanche, dans le filigrane de son conte il dévoile ses propres intentions: aller au-delà des coniques et séparer nettement entre cette classe de courbes traitées et privilégiées par les algébristes, et toutes les autres courbes, sous la stricte condition de ne recourir à aucun autre concept inconnu des Anciens. Il faudra donc rectifier la classification des Anciens, qui, eux, privés de l'algèbre, ne pouvaient repérer ce clivage entre les classes des courbes. Le concept dont dispose Descartes, ou du moins celui qui s'est d'abord présenté à lui, n'est autre que l'ancien concept de mouvement tel que nous le rencontrons dans la tradition aristotélicienne. Dans la *Géométrie*, cette notion de mouvement continu est maniée, il est vrai, sans aucune considération cinématique apparente, mais sans être non plus revêtue de la moindre dimension algébrique. On observera en revanche que, jusqu'ici, la notion d'équation d'une courbe n'intervient pas pour établir la classification; c'est seulement plus tard qu'elle sera appelée pour décrire les éléments de cette classe de courbes privilégiées par les algébristes. Pour l'heure, qu'on me permette d'insister encore, une courbe comme la quadratrice ou la spirale est «mécanique» parce qu'elle est engendrée par deux mouvements continus séparés, «qui n'ont aucune relation mesurable exactement», et par conséquent ne peuvent pas être étudiés dans les termes de la théorie des proportions. Les deux mouvements sont une rotation et une translation. Une fois établie la distinction entre «géométrique» et «mécanique», Descartes peut se consacrer dans sa *Géométrie* aux problèmes et aux courbes géométriques. Le second livre a précisément pour but l'étude de telles courbes, et Descartes y indique,

48. Un commentaire différent de ce texte «historique» est donné par A.G. Molland dans son article «Shifting the Foundations: Descarte's Transformation of Ancient Geometry», *Historia Mathematica 3* (1976), pp. 21-49, notamment pp. 34-36.

dans un texte célèbre des premières pages, que, pour tracer et concevoir ces courbes, lui-même

> ne sache rien de meilleur que de dire que tous les points de celles qu'on peut nommer [courbes] Géométriques, c'est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation, en tous par une même. Et que, lorsque cette équation ne monte que jusque au rectangle de deux quantités indéterminées, ou bien au carré d'une même, la ligne courbe est du premier et plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse qui soient comprises. Mais que, lorsque l'équation monte jusqu'à la trois ou quatrième dimension des deux ou de l'une des deux quantités indéterminées: car il en faut deux pour expliquer ici le rapport d'un point à un autre; elle est du second. Et que, lorsque l'équation monte jusqu'à la cinq ou sixième dimension, elle est du troisième: et ainsi des autres à l'infini.[49]

Ce texte présente la formule la plus précise, à ma connaissance, jamais donnée par Descartes de la notion de courbe, et de ses rapports avec l'équation associée. Il vaut aussi par ses sous-entendus et par ses ambiguïtés, et son élucidation nous permettra de mieux saisir la pensée de l'auteur. Remarquons sans plus attendre que la formulation donnée ne porte assurément que sur les courbes «géométriques», alors que l'intention déclarée de Descartes était sans conteste de parler de toutes les courbes, ou, dans ses propres mots, de «toutes celles qui sont dans la nature». Tout se passe donc comme si Descartes excluait *ipso facto* les courbes mécaniques lorsqu'il tente de définir un peu plus précisément la notion de courbe –comme si pour lui les courbes «mécaniques» n'étaient pas de vraies courbes. Dans ce cas, seules méritent véritablement le titre de courbes celle que l'on pourrait concevoir comme un lieu de points, ou celle que l'on saura tracer à l'aide de son «point le plus général». Descartes semble donc sous-entendre dans ce texte une différence essentielle entre les deux genres de courbes, que la notion de mouvement seule ne suffit pas à clairement manifester. Quelle est donc cette différence

49. *La Géométrie*, A.T. VI, p. 392.

qui distingue les deux classes de courbes? Cette différence semble renvoyer à deux problèms ici mêlés: celui de la constructibilité des points de la courbe; et celui de l'existence des points d'intersection lorsque les courbes se coupent.

Descartes sait en effet que si tous les points d'une courbe «géométrique» sont constructibles, il n'en est pas de même pour une courbe «mécanique». Mieux encore, il sait que, si la courbe «géométrique» est une conique, tous ses points sont constructibles à la règle et au compas; si elle est cubique ou quartique, ses points sont tous constructibles par l'intersection de deux coniques; si elle est du cinquième ou du sixième degré, ses points sont tous constructibles par la fameuse «parabole du second degré» conçue par lui, et un cercle; et ainsi de suite. Plus généralement, il sait que pour une courbe «géométrique» d'ordre n, on peut construire tous ses points si on sait construire tous les points des courbes «géométriques» d'ordre inférieur. Ce procédé en cascade permet ainsi de construire tous les points de la courbe «géométrique». Descartes sait également, mais sans en donner aucune preuve, qu'il ne peut pas appliquer ce procédé en cascade dans le cas des courbes «mécaniques»: il sait qu'il ne peut construire tous les points, loin s'en faut, d'une courbe «mécanique». La raison en est, on le démontrera plus tard, que les points constructibles d'un petit arc de cette courbe, soit un arc de quadratrice par exemple, «forment un ensemble partout dense, mais non fermé, quelque petit que soit l'arc considéré».[50] Seuls les points d'ordonnée $m/2^n, m, n$ entiers, sont atteints par une construction à la règle et au compas. C'est tout cela que Descartes avait vu à sa manière, et, évidemment sans notions topologiques, lorsqu'il écrit:

> Il y a grande différence, entre cette façon de trouver plusieurs points pour tracer une ligne courbe, et celle dont on se sert pour la spirale et ses semblables: car, par cette dernière, on ne trouve pas indifféremment tous les points de la ligne qu'on cherche, mais seulement ceux qui peuvent être déterminés par quelque mesure

50. Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, préface de M. Paul Montel, Paris, Gauthier-Villars, 1950, p. 15.

> plus simple que celle qui est requise pour la composer; et ainsi, à proprement parler, on ne trouve pas un de ses points, c'est-à-dire pas un de ceux qui lui sont tellement propres qu'ils ne puissent être trouvés que par elle. Au lieu qu'il n'y a aucun point, dans les lignes qui servent à la question proposée, qui ne se puisse rencontrer entre ceux qui se déterminent par la façon tantôt expliquée. Et parce que cette façon de trouver une ligne courbe, en trouvant indifféremment plusieurs de ses points, ne s'étend qu'à celles qui peuvent aussi être décrites par un mouvement régulier et continu, on ne la doit pas entièrement rejeter de la Géométrie.[51]

Il est clair que Descartes *voit* plus qu'il ne les démontre les raisons d'exclure les courbes «mécaniques». Cette forte intuition s'appuie, tout au moins au début, sur deux idées qui sont au centre de la géométrie algébrique depuis son commencement avec al-Khayyām. La première est en quelque sorte un isomorphisme supposé entre le calcul sur les segments, lesquels représentent les nombres réels, et les constructions à la règle et au compas de la géométrie euclidienne. Descartes est sans ambiguïté sur ce point dès le début de la *Géométrie*: là, il voit parfaitement, même si c'est sans le prouver, que tout problème «plan» se ramène en dernière analyse à la solution d'une équation du second degré. Seconde idée: les «solides» peuvent être ramenés, en dernière analyse, à une équation polynomiale du troisième degré. Dans un cas comme dans l'autre, tous les points sont constructibles. Implicitement donc, on ne retiendrait que les équations polynomiales, celles qui peuvent être obtenues à l'aide de l'intersection des courbes d'ordre inférieur, mais dont tous les points sont constructibles. Mais cette fois, c'est la question d'existence qui ne tarde pas à se poser. Or cette question, importante, certes, pour elle-même, l'est aussi pour les rapports étroits qu'elle engage avec la définition des êtres sur lesquelles elle porte.

Cette question a été très tôt soulevée dans l'histoire de la géométrie algébrique: comme on construisait les solutions des équations algébriques à l'aide de l'intersection des courbes, il fallait s'assurer que les points d'intersection existent bien.

51. *La Géométrie*, A.T. VI, pp. 411-412.

Il fallait donc une preuve d'existence du point d'intersection pour déduire l'existence de la racine correspondante de l'équation. À peine effleurée pour une seule équation par al-Khayyām, cette question d'existence tient le premier rôle dans le traité d'al-Ṭūsī sur *Les Équations.* Bien plus: posée comme une véritable exigence par ce dernier, la démonstration d'existence le conduit à doubler l'analyse globale d'al-Khayyām de l'étude du comportement des courbes localement, c'est-à-dire au voisinage du point d'intersection. C'est une tentative semblable à celle d'al-Ṭūsī, mais œuvrant à un niveau supérieur, que l'on retrouve chez Fermat. Ce qui nous importe ici, c'est que, dans toutes ces contributions, l'argument principal pour affirmer l'existence du point d'intersection de deux courbes est le suivant: en dernière analyse, l'une des deux courbes a des points de part et d'autre de l'autre courbe, toutes deux supposées continues –c'est-à-dire tracées par un mouvement continu. Quand ces courbes sont des coniques, l'appartenance du point d'intersection à chacune d'elles est déduite du *symptoma.*

Descartes, lui, rencontre cette question, et, si j'ose dire, dans un contexte plus dramatique; non pas en dépit du progrès accompli, mais précisément à cause de celui-ci. Deux raisons à cela; tout comme ses prédécesseurs, il privilégie le tracé par mouvement continu de ces mêmes courbes. C'est ce mouvement continu, on le comprend, qui seul, dans ce contexte, assure la continuité des courbes. Mais, autrement que ses prédécesseurs, il reconnaît le rôle de l'équation pour représenter la courbe. Or, l'équation ne lui permet le plus souvent que la construction par points; et cette construction par points, nous l'avons noté, n'est suffisante que pour les courbes «géométriques». Situation éminemment paradoxale, de deux points de vue, d'importance inégale certes. Premier paradoxe, de loin le plus profond: Descartes n'avait simplement pas les moyens de résoudre cette apparente contradiction, puisqu'il fallait pour cela disposer de la démonstration de Bolzano, dans son mémoire de 1817, du théorème des valeurs intermédiaires.

D'autre part, Descartes rencontre une grande difficulté lorsqu'il s'agit des courbes «mécaniques» dans la mesure où l'on ne peut même pas construire tous les points de la courbe. Plus encore, si Descartes sait résoudre les problèmes «géométriques» par l'intersection des courbes «géométriques», il n'est pas en mesure de procéder de manière analogue pour les problèmes «mécaniques». Leur solution exige en effet l'intersection des courbes elles-mêmes «mécaniques». Or ces dernières courbes n'ont pas d'équation algébrique; elles admettent cependant une équation différentielle algébrique, reliant entre elles non l'abscisse et l'ordonnée, mais leurs différentielles. Il a fallu cette fois attendre Leibniz, et surtout ses successeurs –comme Jacques Bernoulli– avant d'assister à l'élaboration de ces notions et au transfert de ce problème sur un nouveau terrain, celui de l'analyse. En attendant, il n'y a aucune notion d'équation qui puisse représenter une courbe «mécanique». La situation est alors franchement dissymétrique: alors que pour la classe des courbes «géométriques» on peut parler la langue des équations, c'est impossible pour les courbes «mécaniques». À propos des premières, Descartes écrit: «Que pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir le rapportqu'ont tous leurs points à ceux des lignes droites et la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous points à angles droits».[52] Aucun doute ne semble permis: Descartes savait que toutes les propriétés des courbes «géométriques» doivent être tirées de leur équation. Programme auquel, nous le savons, il ne s'est jamais appliqué –il fallut attendre le jeune Newton. Ainsi, entre ce que vient de dire Descartes, et la définition de la courbe par son équation, sa *caractérisation* par elle, il n'y a qu'un pas. Descartes ne l'a pas franchi, sans doute empêché par la dissymétrie déjà signalée avec les courbes «mécaniques». Exclues de la géométrie, certes, elles ne peuvent pas, pour Descartes être représentées par des équations, ce qui rend impossible la tâche d'unification. Impuissant donc à unifier la

52. *Ibid.*, pp. 412-413 en marge.

caractérisation de toutes les courbes, l'avocat de la clarté s'est vu acculé à demeurer dans un clair-obscur. C'est là un trait de sa *Géométrie*, et une raison profonde du conflit de ses interprétations.

Nous voyons donc que ce qui sépare les deux classes de problèmes et de courbes ne tient pas à la seule notion de mouvement, mais aussi aux questions soulevées par la construction -et par l'existence- de leurs points, ainsi qu'au pouvoir qu'a l'équation de les définir. Cette classification des problèmes et des courbes, même si elle n'a pas été complètement explicitée par Descartes, s'est cependant construite au cours des années, comme instrument destiné à explorer l'étude de certaines courbes à l'aide de leurs équations. Et c'est du reste en ce sens que la *Géométrie* de Descartes mérite vraiment son nom. Ne peut-on pas, cette fois, retrouver à partir de l'équation les propriétés de la courbe, ses tangentes et ses normales notamment? C'est en tout cas ainsi que les successeurs de Descartes ont lu sa *Géométrie*, comme par exemple Cramer. Pour ne citer que lui, voici ce qu'il écrit dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750:

> C'est surtout dans la théorie des courbes qu'on éprouve bien sensiblement l'utilité d'une méthode aussi générale que l'est celle de l'Algèbre. Descartes, dont l'esprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philosophie, n'eut pas plutôt introduit la manière d'exprimer la nature des courbes par des équations algébriques, que cette théorie changea de face.[53]

C'est là, bien sûr, une lecture régressive de la *Géométrie* par le mathématicien Cramer; il n'en reste pas moins vrai qu'il y a bien là au moins une potentialité de ce second axe de recherche de Descartes. Et de fait, si l'on trouve bien dans le sillage d'al-Khayyām, c'est-à-dire chez al-Ṭūsī, lors de ses recherches sur les *maxima*,[54] ou plus généralement ses

53. Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750, pp. VII-VIII.

54. *Op. cit*, vol. I, pp. XVIII-XXXI.

recherches sur l'existence des points d'intersection, l'étude de certaines courbes à l'aide de leurs équations, al-Ṭūsī ne distingue pas nettement entre l'équation polynomiale et la courbe, en dehors des coniques. La notion d'équation d'une courbe restait donc alors limitée, et n'était guère transparente pour constituer un programme de recherche. Or c'est précisément cette fonction qu'elle trouve avec Descartes, grâce à l'extension de l'étude des courbes au-delà des coniques, et à sa distinction de cette classe de courbes qui peuvent être étudiées par le moyen de l'algèbre. La restriction de la *Géométrie* de Descartes aux courbes «géométriques» n'est pas la conséquence d'une négation de l'existence des courbes «mécaniques», mais de la généralisation de la notion de courbe «géométrique»; l'exclusion des courbes «mécaniques» est donc un acte éminemment positif.

Instrument puissant destiné à marquer la frontière de la géométrie algébrique, la distinction entre les deux classes de courbes fournit également les moyens d'établir une autre opposition, importante pour la philosophie de Descartes. Courbes géométriques et courbes mécaniques sont envisagées par Descarte d'un double point de vue. Idées mathématiques, elles sont justiciables à ce titre du critère de la vérité définie comme représentation claire et distincte. La courbe mécanique, tout comme la courbe géométrique, est un objet intellectuel présent à la pensée dans la mesure où il représente. L'une comme l'autre ont donc une vérité indubitable, relevant de l'évidence, laquelle est définie comme clarté et distinction intellectuelles. Mais, d'autre part, notre connaissance de chacune ne se confond pas avec celle de l'autre: elle s'y opposerait même. Cette opposition est hiérarchisée: il y a dans notre connaissance de la courbe géométrique davantage de perfection que dans celle de la courbe mécanique, eu égard à la construction de ses points, à la simplicité du mouvement qui l'engendre, à la rigueur de l'équation qui la caractérise. À cela s'ajoute le procédé en cascade, cet enchaînement apodictique et réglé par un ordre de raisons, qui permet de connaître, en une fois et complètement, la courbe géométrique, quel que soit son degré. Autant de procédés qui définissent mathématiquement la connaissance claire et distincte, opposée à celle des courbes mécaniques, lesquelles, de ce second point de vue, sont objet d'une connaissance claire seulement. Or c'est ce clivage entre «clair et distinct» d'une part, et «clair» d'autre part, qui a fini par séparer les deux classes de courbes, en consacrant l'exclusion des courbes mécaniques de la géométrie. Mieux encore, c'est cette opposition qui a isolé les courbes géométriques.

Tels sont, brièvement esquissés, ces deux mouvements qui semblent régler l'évolution de la *Géométrie* de Descartes. Le premier s'oriente vers l'accomplissement d'un projet scientifique conçu six siècles auparavant sous d'autres climats; le second recueille le début d'une étude des courbes, pour en faire un nouveau programme dont la réalisation sera un gage d'avenir, source de deux nouveaux courants: celui de la Géométrie algébrique, avec Cramer et Bézout; et celui de la Géométrie differentielle, avec les frères Bernoulli.

La *Géométrie* illustre la complexité des rapports entre tradition et modernité au XVII^{e} siècle, et témoigne de la difficulté d'instaurer une dialectique entre ces notions. La modernité que représente la *Géométrie* de Descartes se donne ainsi comme la réalisation de quelques potentialités héritées de la tradition, en même temps qu'elle est génératrice de potentialités neuves pour le futur. Mais pouvait-il en être autrement? On peut bien, si l'on ne pense que par des concepts tout faits, dire que continuités et ruptures sont inscrits les unes dans les autres. Tout discours sur la *Géométrie* de Descartes sera donc nécessairement oblique, s'il ignore ou néglige les liens intimes qui l'enracinent dans la tradition, aussi bien que les nouveaux possibles qui l'habitent, et ne se réalisent effectivement qu'une fois la modernité elle-même devenue traditon.

Lire la *Géométrie* de Descartes, c'est aussi regarder en amont vers al-Khayyām, al-Ṭūsī; et, en aval, vers Newton, Leibniz, Cramer, Bézout et les frères Bernoulli. C'est alors que la *Géométrie* retrouve la position qui n'a jamais cessé d'être la sienne: non plus que les autres œuvres novatrices, elle n'a rien d'un commencement radical; au même titre que les autres, elle est une manière de reprendre, d'adapter, et aussi de rectifier, les traditions dont elle est l'héritière.