

Khayyām et le théorème du binôme

Quoique le triangle arithmétique nous soit familier, nous insisterons, avant d'aborder son histoire, sur certaines de ses propriétés plus importantes.

On pose $C_n^n = \binom{n}{n} = 1$

$0! = 1$

Remarque $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

Rangeons alors les C dans un tableau à double entrée; n sera le numéro de la ligne, m celui de la colonne: compte tenu des égalités $C_n^0 = C_n^n = 1$, la règle $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ permet de calculer chaque ligne à partir de la précédente:

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
⋮						
$n-1$	1	C_{n-1}^1	C_{n-1}^2	...	C_{n-1}^{m-1} C_{n-1}^m	...1
n	1	C_n^1	C_n^2	...	C_n^m	... C_n^{n-1} 1.

Ce tableau appelé triangle de Pascal, est en réalité le produit d'une culture orientale beaucoup plus ancienne.

D'après la formule: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, considérant alors les termes de degré m , dans $(ax+b)^k$ et $(ax+b)^{k+1}$ $k > m$, l'on vérifie par récurrence

sur n la formule:

$$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{m(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

De ces nombres dits «coefficients du binôme», nous pouvons donc écrire

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

Dans les mathématiques modernes qui suivent l'analyse combinatoire et les probabilités, cette formule se trouve être un instrument de très grande valeur pour de multiples usages. L'un d'eux, dont on peut faire l'essai par soi-même, est un stratagème arithmétique. Pour trouver $(4,84)^8$, par exemple, il n'est pas nécessaire de faire une longue série de multiplications. Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} (4,84)^8 &= (4 \times 1,21)^8 \\ &= 4^8 \times (1,21)^8 \\ &= 4^8 \times \left(1 + \frac{21}{100}\right)^8 \end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{21}{100}\right)^8 &= 1 + 8\left(\frac{21}{100}\right) + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \left(\frac{21}{100}\right)^2 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{21}{100}\right)^3 \\ &\quad + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{21}{100}\right)^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$= 1 + 8(0,21) + 28(0,0441) + 56(0,009261) + \text{etc.}$$

L'avantage de ceci est que nous avons une série de nombres devenant de plus en plus petits et que nous pouvons nous arrêter au terme qui nous convient. Par exemple:

$$\begin{aligned} (1,01)^{10} &= 1 + 10(0,01) + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} (0,0001) \\ &\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} (0,000001) + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$= 1 + 0,1 + 0,0045 + 0,000120 + 0,0000021 + \text{etc.}$$

La réponse avec sept chiffres exacts est $1,1046221$.¹

Son nom de triangle arithmétique de Pascal provient d'une erreur historique. Car la thèse de Pascal inventeur de la formule du binôme, a été exposée et soutenue dans une note publiée en 1869, par Monsieur Delègue, professeur de philosophie au collège de Dunkerque. Cette note est intitulée: *Démonstration de la formule du binôme de Newton d'après Pascal*, et elle fait suite à un essai sur les travaux de Pascal touchant la géométrie infinitésimale et la formule du binôme, présentée à la réunion des délégués des Sociétés Savantes à la Sorbonne, le 2 avril 1869.

En fait on trouve trace de cet outil de calcul bien avant Pascal. Dans l'état actuel de nos connaissances, la plus ancienne apparition du triangle arithmétique semble avoir eu lieu chez deux mathématiciens iraniens: al-Karadjī et 'Omar Khayyām.

Al-Samaw'al ibn Yahyā al-Maghribī, mathématicien et philosophe musulman du XII^{ème} siècle, dans son livre intitulé *al-Bāhir fī 'ilm al-hisāb* (Le livre lumineux sur l'arithmétique) donne le tableau des coefficients binômiaux, extrait d'une oeuvre perdue d'al-Karadjī comme moyen de connaître «le nombre dans le développement des carrés, des cubes et jusqu'à la limite que l'on veut». Ce tableau des coefficients est donné en effet selon le schéma que nous reproduisons à la page suivante.

D'autre part le calcul de c_n^m suppose connu le coefficient binomial d'indice $(n-1)$.

En effet, la règle de formation donnée par al-Karadjī est équivalente à:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

Cette méthode est d'ailleurs énoncée pour n entier aussi grand que l'on veut². Voici les termes mêmes d'al-Samaw'al: «Rappelons maintenant un principe pour connaître le nombre nécessaire de multiplications de ces degrés les uns par les autres, pour tout nombre divisé en deux parties. Al-Karadjī a dit que si l'on veut y parvenir il faut poser sur un tableau «un» et «un» au-dessous du

1- Hogben, *Mathématiques pour tous*, trad. française par F.H. Larrouy, Paris, 1962, p. 337-338.

2- R. Rashed, «L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al», *Archive for History of Exact Science*, vol. 9 n°1., 1972, p.5-7.

مقاله نخستین هر کلمه احد من عدد الجمل من طبعها لکن الجداول مال مال

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۶۶	۵۵	۴۵	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	۱	
۲۲۰	۱۶۵	۱۲۵	۸۴	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	۴	۱		
۴۹۵	۳۳۰	۲۱۰	۱۲۶	۷۵	۴۰	۱۵	۵	۱			
۹۲۴	۶۲۳	۴۰۲	۲۲۶	۱۲۹	۶۱	۲۶	۱				
۱۶۶۴	۱۱۶۳	۷۱۵	۴۲۴	۲۴۸	۱۲۷	۵۶	۱				
۲۹۵۲	۲۰۱۵	۱۲۰	۳۶	۸	۱						
۴۹۵	۱۶۵	۴۵	۹	۱							
۲۲۰	۵۵	۱۵	۱								
۶۶	۱۱	۱									
۱۲	۱										

premier, déplacer le [premier] «un» sur une autre colonne, ajouter le [premier] «un» à celui qui est au-dessous de lui: on obtiendra ainsi «deux» que l'on posera sous le «un» [déplacé] et on posera le [deuxième] «un» au-dessous de lui. On aura donc «un», «deux» et «un». Ceci montre que pour tout nombre composé de deux nombres, si l'on multiplie chacun d'eux par lui-même une seule fois – car les deux extrêmes sont «un» et «un» – et si l'on multiplie chacun d'eux par l'autre deux fois – parce que le terme intermédiaire, est 2 – on obtiendra le carré de ce nombre. Si on déplace ensuite le «un» de la deuxième colonne sur une autre colonne, qu'on ajoute le «un» [de la deuxième colonne] au «deux» [au-dessous de lui], on aura «trois» qu'on inscrira sous le «un» [de la troisième colonne] si on ajoute alors le «deux» [de la deuxième colonne] au «un» au-dessous de lui, on aura «trois»

qu'on inscrira sous «trois», puis on inscrira «un» sous ce «trois»; on obtiendra ainsi une troisième colonne dont les nombres sont «un», «trois», «trois» et «un». Ceci nous apprend que le cube de tout nombre composé de deux nombres est donné par la somme du cube de chacun d'eux et de trois fois le produit de chacun d'eux par le carré de l'autre. Si on déplace encore le «un» de la troisième colonne sur une autre colonne, et si on ajoute le «un» [de la troisième colonne] au «trois» au-dessous de lui, on aura «quatre» que l'on inscrira sous «un»; si on ajoute alors le «trois» au «trois» au-dessous de lui, on obtiendra δ qu'on inscrira sous «quatre»; si on ajoute ensuite le deuxième «trois» au «un» au-dessous de lui, on aura «quatre» qu'on inscrira sous «six», puis on déplacera «un» sous «quatre»; il en résultera une autre colonne dont les nombres sont «un», «quatre», δ , «quatre» et «un». Ceci nous apprend que la composition du carré-carré d'un nombre constitué de deux nombres est donnée par le carré-carré de chacun d'eux – puisqu'on a «un» aux deux extrêmes – puis par quatre fois le produit de chacun des nombres par le cube de l'autre – parce que «quatre» succède aux extrêmes «un» et «un» – car la racine multipliée par le cube est le carré-carré et enfin par six fois le produit du carré de chacun d'eux par le carré de l'autre – car le produit du carré par le carré est le carré-carré. Que l'on déplace ensuite le «un» de la quatrième colonne sur une cinquième colonne et qu'on ajoute le «un» au «quatre» au-dessous de lui, le «quatre» au «six», le «six» au «quatre» et le «quatre» au «un», puis qu'on inscrive les résultats sous le «un» déplacé de la manière susdite, qu'on inscrive enfin le «un» qui reste, on aura une cinquième colonne dont les nombres sont «un», δ , «dix», «dix», δ et «un». Ceci nous apprend que pour tout nombre divisé en deux parties, son quadrato-cube est égal au quadrato-cube de chacune des parties – car les deux extrêmes sont «un» et «un» – à cinq fois le produit de chacune d'elles par le carré-carré de l'autre – puisque le «cinq» succède aux deux extrêmes sur les deux côtés et dix fois le produit du carré de chacune d'elles par le cube de l'autre – parce que le «dix» succède aux deux cinq. Chacun de ces termes appartient au genre du quadrato-cube car le produit de la racine par le carré-carré et celui du cube par le carré donnent l'un et l'autre le quadrato-

cube; on peut ainsi connaître le nombre des carrés et des cubes pour la puissance que l'on veut.

'Omar Khayyām, à la suite d'al-Karadjī et indépendamment de lui, était en possession de cette formule dans un ouvrage non encore retrouvé. Il écrit en effet dans son algèbre:

«Les Indiens possèdent des méthodes pour trouver les côtés des carrés et des cubes, fondées sur une telle connaissance d'une suite de nombres peu étendue, c'est-à-dire la connaissance des carrés des neuf chiffres, à savoir du carré d'un, de deux, de trois, etc... ainsi que les produits formés en les multipliant l'un par l'autre, à savoir du produit de deux en trois, etc... J'ai composé un ouvrage sur la démonstration de l'exactitude de ces méthodes et j'ai prouvé qu'elles conduisent en effet à l'objet cherché. J'ai en outre augmenté les espèces, c'est-à-dire que j'ai enseigné à trouver les côtés du carré-carré, du quadrato-cube, du cubo-cube, etc... à une étendue quelconque, ce qu'on n'avait pas fait précédemment. Les démonstrations que j'ai données à cette occasion ne sont que des démonstrations arithmétiques, fondées sur les parties arithmétiques des éléments d'Euclide».³

Puisque son livre est perdu, nous ignorons s'il s'en servit pour les travaux mathématiques ou astronomiques. Peut-être s'en amusait-il, comme Léonard de Pise le faisait avec la série de Fibonacci. En tous cas ce travail montre bien le genre d'esprit systématique et généralisateur de Khayyām.

Le théorème du binôme de Karadjī-Khayyām a été employé par plusieurs mathématiciens. L'oeuvre d'al-Zangānī (m. 1262), un autre Iranien, contient un exemple de l'extension à la septième puissance du théorème du binôme.⁴

Dans le *Djawāmi' al-ḥisāb bi l-takht wa l-turāb* (*Traité de calcul par la tablette et le sable*) d'al-Ṭūsī, philosophe persan, qui date de 1265, on trouve les premiers résultats relatifs à l'analyse combinatoire: énoncé verbal de la formule du binôme donnant le développement de $(a+b)^n$, calcul des coefficients binômiaux jusqu'à $n=12$ par un tableau très proche du triangle de Pascal et

3- Woepcke, *L'algèbre d'Omar al-Khayyam*, Paris, 1951, p.13.

4- M. Yadegari, «The binomial Theorem. A widespread concept in medieval Islamic Mathematics», *Historia Mathematica*, 7, 1980, p. 401-406.

formulé:⁵

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

Le point remarquable ici est qu' al Tūsi dans le domaine mathématique avait été fortement influencé par 'Omar Khāyyām.

Il est représenté également dans le *Précieux miroir des quatre éléments* écrit vers l'an 1300 de l'ère chrétienne, par le mathématicien Chu Shi Kei qui vivait à l'époque où l'empire mongol s'étendait en Europe Orientale (voir p. suivante).

On le retrouvera également dans le *Miftāḥ al-ḥisāb (La clé de l'arithmétique)* d'al-Kāshī, mathématicien iranien du XV^{ème} siècle. Celui-ci appelle les coefficients du binôme «élément des exposants» et n'applique évidemment pas ce terme aux coefficients du premier et du dernier terme du développement. Ceux-ci, comme on le sait, sont égaux. La deuxième puissance possède ainsi un «élément» de l'exposant, la troisième en possède deux, etc... chaque puissance étant égale au nombre de ses éléments. Al-Kāshī donne ensuite une formule additive pour le calcul successif des coefficients, qui correspond à notre formule $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$ et établit un tableau des coefficients binômiaux jusqu' à la neuvième puissance incluse.

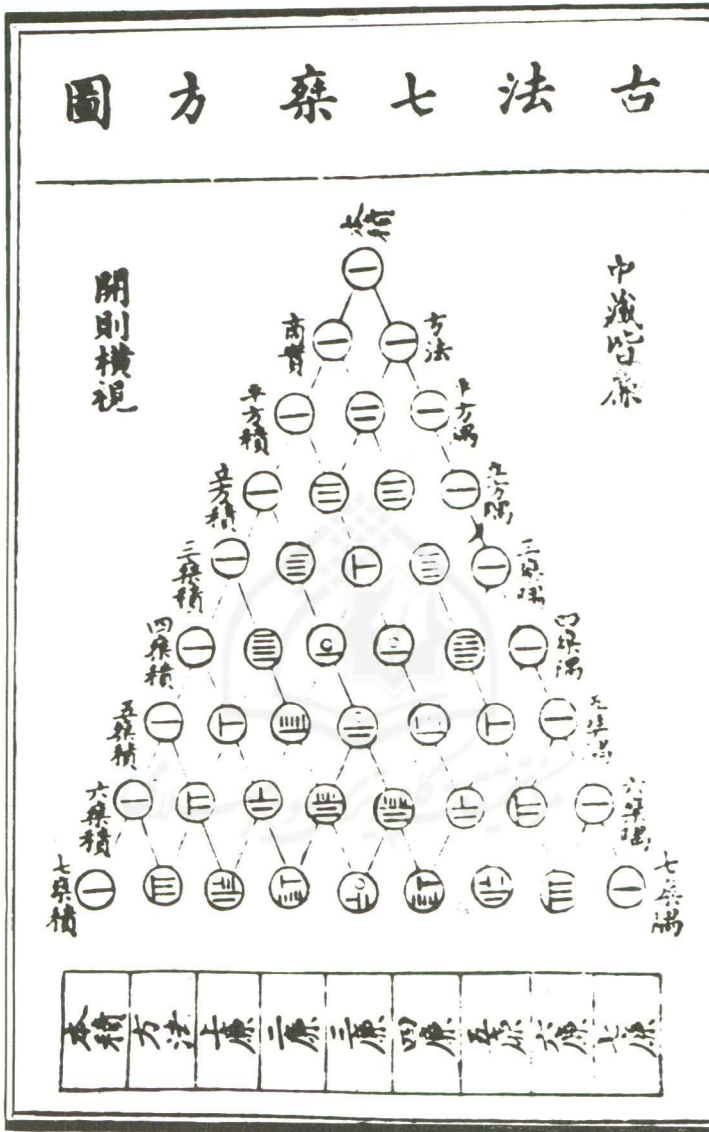
Il donne également la règle de développement du binôme dans le cas particulier de la puissance 5. Mais comme on le sait par la loi de formation des coefficients, donnée par le «triangle de Pascal», cette règle est valable pour une puissance quelconque. En substance, la règle d'al-Kāshī correspond à notre formule

$$(a+b)^n - a^n = \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

En tous cas les travaux d'al-Kāshī témoignent de l'intérêt que suscitaient les nombres triangulaires dans les pays orientaux et ceci nous amène à supposer leur emploi habituel dans les mathématiques islamiques médiévales.

Malgré cela al-Kāshī et ses prédécesseurs n'ont tous donné que la formule récurrente qui fait trouver les coefficients de la puissance $n+1$ en partant de ceux de la puissance n . Tandis qu'au XVII^{ème} siècle Moḥammad Bāḳer Yazdī, un autre mathématicien

5- A. Ambuba, «Al Tusi», *Dictionary of Scientific Biography*, New-York, 1970, p. 508-517.



cien iranien, fait avancer la recherche avec la formule suivante dans son 'Uyūn al-ḥisāb (Les sources de l'arithmétique)⁶:

$$C_{n+1} = C_n \frac{n+1}{n+1-r}$$

6- A. Korbāni, *Do riyāzīdān-e irānī (Deux mathématiciens iraniens)*, Téhéran, 1347/1968, p. 41.

rencontre fréquemment dans les traités d'arithmétique et d'algèbre, où les auteurs lui donnent à l'envie les formes les plus diverses. Par conséquent, il est probable que Pascal était familiarisé avec le triangle arithmétique de Stifel.

D'après d'éminents historiens des mathématiques, le triangle arithmétique serait bien, il est vrai imaginé par Stifel, mais la disposition donnée à son triangle serait de Pascal.⁸

Cependant le mérite du géomètre français est l'usage ingénieux qu'il en a fait dans le calcul des probabilités.

Finalement, le théorème du binôme est une base d'analyse. Car dans l'expression générale $(a+b)^n$ si n n'est pas un nombre entier positif, la série n'a pas de fin et cette méthode de démonstration est inapplicable.

La démonstration du théorème du binôme pour des valeurs fractionnaires et négatives de n (c'est-à-dire pour le cas général), avec l'énoncé des restrictions nécessaires concernant a et b n'a été donnée qu'au XIX^{ème} siècle. Ici, contentons-nous de dire qu'en étendant le théorème à ces valeurs de n , Newton acquit la conviction qu'il satisfait aux valeurs de a et de b qu'il avait l'occasion de considérer dans son étude.

L'idée géniale de Khayyām ressort bien de tout cela. C'est ce qu'ont signalé les savants qui participèrent à un congrès international d'histoire des sciences tenu à Rome. Rozenfeld, professeur à l'Université de Moscou, y a présenté une motion proposant que soit donné le nom de Khayyām au triangle arithmétique et au binôme.⁹ Aujourd'hui toutefois, il convient de placer le nom de Karadjī à côté de celui de Khayyām et de parler du triangle de Karadjī-Khayyām.

8- H. Basmans, «Note historique sur le triangle arithmétique, dit de Pascal» *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, XXXI, octobre 1906, p. 72.

9- M. Hashtūdī, «Khayyām shā'er- rīyāzīdān», *Yekān*, vol. 12, p. 239.